**MÓDULO 6**

**Neutralidade e Aversão a Risco: O Modelo de Média-Variância**

**Marcos Cavalcanti (1920533) & Gustavo Deutscher (1820438)**

**Questões Teóricas**

**Item T.1**

Seja , , . Aplicando o Modelo Média-Variância (Markowitz), devemos minimizar a variância da carteira, dado um valor mínimo esperado fixo . Assim, o modelo de otimização que busca essa carteira é:

onde, é a variável aleatória que representa o retorno da carteira e a variável aleatória que representa o retorno dos ativos.

Dado que será investida toda riqueza inicial, isto é, , temos:

**Item T.2**

Associando à restrição (1) e à restrição (2), escrevemos a função Lagrangeana abaixo:

As condições de primeira ordem são:

Expandindo, obtêm-se:

**Item T.3**

A partir dos dados históricos dos ativos, temos os valores esperados: e temos as covariâncias entre os ativos:

Assim, basta resolvermos o sistema linear abaixo:

Utilizando o site matrixcalc.org para a solução do sistema, obtemos os seguintes pesos e os valores para os multiplicadores de Lagrange:

Além disso, a variância da carteira é dada por:

**Item T.4**

O quarto ativo é possui variância nula, portanto:

Sendo assim, pode-se reduzir o problema assumindo .

O operador Covariância satisfaz a seguinte propriedade:

É evidente que ao resolver o problema de otimização, o peso destinado ao ativo quatro será de 100%. Que é facilmente mostrado ao resolver o sistema abaixo:

Utilizando o site matrixcalc.org para a solução do sistema, obtemos os seguintes pesos e os valores para os multiplicadores de Lagrange:

**Questões Práticas**

A fórmula da função objetivo, que representa a Variância da carteira, na qual queremos minimizar, pode ser visto na imagem da planilha abaixo:

Interface gráfica do usuário, Aplicativo, Tabela, Excel

Descrição gerada automaticamente

1. Dada as restrições mostradas abaixo e utilizando o Solver do Excel, obtivemos os pesos também mostrados abaixo:

Tabela, Excel

Descrição gerada automaticamente

1. Obtendo os valores dos pesos para diferentes retornos mínimos, obtemos as seguintes variâncias e pesos ótimos:

Tabela

Descrição gerada automaticamente

Assim, podemos montar a fronteira eficiente a partir dos valores da variância da carteira com os pesos ótimos:

1. Destinando os pesos aos ativos como pede a questão, obtemos um retorno de 11,20% e uma variância de 0,06783; No entanto, os pesos ótimos e as variâncias para uma carteira com retorno mínimo de 11,20% é:

Texto

Descrição gerada automaticamente

Isto pode ser visualizado no gráfico abaixo, o ponto laranja representa a carteira em questão, note que este ponto se encontra fora da fronteira eficiente:

Interface gráfica do usuário, Aplicativo, Tabela, Excel

Descrição gerada automaticamente

Note que o peso 3 ficou no mínimo possível, 40% e, a variância foi de 0,12003 que é maior que a variância do primeiro item, de 0,119701. Neste cenário, a carteira se encontra fora da fronteira eficiente.

1. Os cenários da nova carteira são dado pela média ponderada dos ativos 1,2 e 3 com os pesos dados na questão, para cada cenário. Assim, como cada cenário possui a mesma probabilidade de ocorrência, basta contar os que resultaram em retornos menores que 14%. Logo, essa probabilidade é de 60,5%.

Interface gráfica do usuário, Aplicativo, Tabela, Excel

Descrição gerada automaticamente

1. Como neste cenário não são permitidos pesos negativos, o solver optou por alocar toda riqueza inicial no ativo 1, o de menor variância, no entanto este ativo irá entregar retorno inferior a 20%. Logo, o Solver violou a restrição das somas dos pesos serem menores que 1 e fez w1=1,176863.
2. O modelo buscar minimizar a variância, como existe um novo ativo 4 com variância 0 e retorno igual ao retorno mínimo desejado, o modelo irá destinar toda riqueza inicial ao ativo 4.

Interface gráfica do usuário, Aplicativo, Tabela, Excel

Descrição gerada automaticamente